BRST-Symmetrie

Proseminar in Theoretischer Physik ETHZ SS97

9. Juni 1997

τὸ γὰρ αὐτὸ νοεῖν ἐστίν τε καὶ εἶναι.
(Parmenides, 5. Jht. v. Chr.)

Zusammenfassung

1975 entdeckten Becchi, Rouet und Stora [1], und unabhängig Tyutin [2], daß die Wirkung selbst nach der Eichfixierung und dem Auftreten der Faddeev-Popov-Geisterfelder noch immer eine Symmetrie besitzt – Invarianz unter einem neuen, allerdings nilpotenten Operator. Diese Symmetrie und der damit verwandte Antifeld-Formalismus haben sich als gutes Werkzeug für Renormierbarkeitsbeweise und die Analyse von Anomalien allgemeiner Eichtheorien erwiesen. Durch *Forderung* von BRST-Invarianz kann man eine Verallgemeinerung der Faddeev-Popov-Methode erreichen (BRST-Quantisierung). Wir wollen hier nur einen Überblick über die Resultate bieten. Für explizite Rechnungen und mehr Information müßt ihr die Literatur konsultieren, zuerst Weinberg [12].

1 Geister und Unitarität

Die Faddeev-Popov Geisterfelder sind eigentlich 'nur' die Determinante Δ_f, die auftaucht, wenn man im Erzeugenden Funktional die Eichung fixiert:

$$Z \propto \int A_\mu \exp(iS) = \int A_\mu \Delta_f[A_\mu] \int UB\left[f[A_\mu^U]\right] \exp(iS),$$

$$\Delta_f[A_\mu] \int UB\left[f[A_\mu^U]\right] = 1.$$

U steht hier für eine Darstellung der Eichtransformation, $U = e^{i\lambda_a(x)t_a}$, und $A_\mu^U = UA_\mu U^\dagger - i(\partial_\mu U)U^\dagger$. B soll die Eichung fixieren und hängt ab von Funktionalen f_a, normalerweise von der Form eines Gauß-Integrals

$$B[f] = \exp\left(-\frac{i}{2\xi}\int d^4x\, f_a(x) f_a(x)\right),$$

der Index a zählt die Generatoren der Lie-Algebra der Eichgruppe ('Farb-Index'). Die Generatoren erscheinen in der adjungierten Darstellung $(t_a)_{bc} = iC_{abc}$, die Strukturkonstanten sind alle reell, und deshalb können wir auf eine Unterscheidung von oberen und unteren Indizes verzichten. Wenn das Maß A_μ eichinvariant ist, kann man die U-Abhängigkeit von f_a vergessen, und $\int U$ als konstanten, wenn auch unendlichen Faktor vors Integral ziehen und wegkürzen:

$$Z \propto \int A_\mu \Delta_f B[f] e^{iS}.$$

Man findet $\Delta_f = \det\left|\frac{\delta f}{\delta \lambda}\right|_{\lambda=0} =: \det \mathcal{F}$, wobei λ_a die infinitesimalen Erzeugenden der Eichtransformation sind. Diese Determinante läßt sich schreiben als

$$\det i\mathcal{F} = \int \omega\,\omega^* \exp\left(-i\int d^4x d^4y\, \omega_a^*(x)\mathcal{F}_{ab}\omega_b(y)\right),$$

mit den Grassmann-Variablen ω_a und ω_a^*, die, wenn wir den Exponenten in obiger Formel in die Wirkung absorbieren, die Geisterfelder verkörpern:

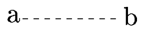
$$Z \propto \int A_\mu\, \omega^*\, \omega \exp\left(i\int dx \mathcal{L}_{\mathrm{FP}}\right),$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{FP}} = \mathcal{L} - \tfrac{1}{2\xi} f_a f_a - \partial_\mu \omega_a^* \partial^\mu \omega_a + C_{abc}(\partial_\mu \omega_a^*) A_c^\mu \omega_b;$$

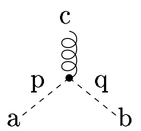
die Lorentz (oder Landau) Eichung erhält man für $\xi \to 0$, $f_a = \partial_\mu A_a^\mu$.

Alternativ, wenn wir die Geister als Teilchen 'ernstnehmen', können wir argumentieren, daß, da sie fermionischer Statistik gehorchen und somit in jedem Diagramm mit Geisterschleifen ein Minuszeichen auftaucht, gerade alle Divergenzen, die wegen Integration über äquivalente Konfigurationen auftreten, durch solche Minuszeichen abgefangen werden. Diese Interpretationen sind natürlich äquivalent bzw. Geschmackssache.

Aus der effektiven Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\mathrm{FP}}$ kann man nun auch die Feynman-Regeln für Geister bestimmen (die Kopplungskonstante g steht hier explizit, die Faktoren $(2\pi)^4$ und die Impulserhaltungs-Dirac-δ-Funktionen sind unterschlagen, aber mitgemeint):

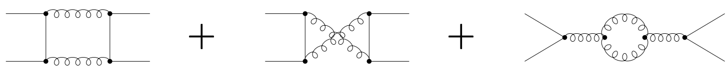


$(i\Box)^{-1} = \frac{i}{k^2}\delta^{ab}$

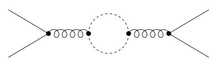


$-gC_{abc}p_\mu$

Man sieht hier, daß die Geister trotz ihrer Statistik wie skalare Teilchen propagieren. Ein weiterer interessanter Einblick in die Rolle von Geistern bieten Betrachtungen über die Unitarität der S-Matrix (cf. Ryder [13, §7.7]). Schon 1962 bemerkte Feynman [4], daß in nichtabelschen Eichtheorien, wo Eichbosonen an Eichbosonen koppeln, die Unitarität verletzt wird, wenn man für einen Prozeß alle Diagramme vierter Ordnung addiert:



Der benötigte Beitrag zur Wiederherstellung der Unitarität entspricht genau dem Beitrag einer Geisterschleife:



Vergleiche auch Aitchison & Hey [14, §12.1].

2 Eine neue Symmetrie

Nachdem wir uns für eine Eichfixierung entschlossen haben, erwarten wir nicht, daß die Wirkung noch irgendwelche (Eich-)Symmetrien aufweist, im Gegenteil, wir hoffen, uns nun aller 'Mehrfachzählungen' in unserem Integral entledigt zu haben. Trotzdem aber gehorcht die Wirkung noch immer, quasi als Nebenprodukt der Faddeev-Popov-Methode, einer gewissen Symmetrie, entdeckt 1975 von Becchi, Rouet, Stora [1] und Tyutin [2]. Die Erzeugende dieser Symmetrie ist allerdings nilpotent, und deshalb konnten wir ungestraft über unsere fixierte Eichung integrieren. Schreiben wir nun das Eichfixierungsfunktional $B[f] \propto \exp(-\frac{i}{2\xi}\int f_a f_a)$ als Fourierintegral

$$B[f] = \int h_a \exp\left(\frac{i\xi}{2}\int h_a h_a\right) \exp\left(i\int f_a h_a\right).$$

Die Hilfsfelder h_a werden auch *Nakanishi-Lautrup-Felder* genannt. Mit ihrer Hilfe bekommt die FP-Lagrangedichte die Form

$$\mathcal{L}_{\mathrm{FP}} = \mathcal{L} + \omega_a^* \Delta_a + h_a f_a + \tfrac{1}{2}\xi h_a h_a,$$

$$\Delta_a(x) = \int d^4y \mathcal{F}_{ab}\omega_b = \int d^4y \left.\frac{\delta f_{a\lambda}(x)}{\delta\lambda_b(y)}\right|_{\lambda=0} \omega_b(y)$$

bringen. Wir definieren den Operator δ, parametrisiert durch die infinitesimale Grassmann-Variable [1] wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\delta\psi &= it_a\omega_a\psi, \\
\delta A_{a\mu} &= D_\mu\omega_a, \\
\delta\omega_a^* &= -h_a, \\
\delta\omega_a &= -\tfrac{1}{2}C_{abc}\omega_b\omega_c, \\
\delta h_a &= 0.
\end{aligned}
$$

Die t_a sind die Generatoren der Lie-Algebra, D_μ steht für die kovariante Ableitung $(d+A)$. Man beachte, daß δ die Geisterzahl aller Felder um eins erhöht, es handelt sich also quasi um eine 'Rotation in die Geister hinein'. Lassen wir nun das fallen und definieren wir den BRST-Operator s auf ein beliebiges Funktional F der Felder durch $sF = \delta F$. Durch Einsetzen findet man die Nilpotenz:

$$s^2 = 0.$$

Die Wirkung von s auf Massen- und Eichfelder ist gerade die einer Eichtransformation mit infinitesimalem Parameter $\lambda_a = \omega_a$ und somit ist $s\int\mathcal{L} = 0$. Die neuen Terme der Faddeev-Popov-Wirkung $\int\mathcal{L}_{\mathrm{FP}}$ erweisen sich hingegen als bereits im Bild von s liegend, $I = \int\mathcal{L}_{\mathrm{FP}} = \int\mathcal{L} + s\Psi$, und deshalb folgt aus der Nilpotenz von s direkt die Invarianz der Wirkung, $sI = 0$. Daraus ersieht man, daß der physikalische Inhalt der Theorie im Kern modulo dem Bild, also der *Kohomologie*, des BRST-Operators liegt. Das ist auch gut so, denn der zweite Term von I, $s\Psi$, hängt von der Wahl der Eichung ab. Wir können auch eine (fermionische) BRST-Ladung Q einführen (mit Geisterzahl eins), die für einen Feldoperator Φ erfüllt $[Q,\Phi] = is\Phi$ ($[\ ,\ ]$ ist der Kommutator oder Antikommutator, entsprechend der Statistik von Φ). Es folgt $Q^2 = 0$ und wegen der Unabhängigkeit der Matrixelemente $\langle\alpha|\beta\rangle$ von der Eichwahl muß gelten

$$Q\,|\beta\rangle = \langle\alpha|\,Q = 0$$

für beliebige Zustände α und β. In welchem Sinne BRST wirklich ein 'ghostbuster' ist, zeigt die Anwendung dieser Methode auf die QED: Entwicklung der Felder nach Normalmoden

$$
\begin{aligned}
A^\mu(x) &= (2\pi)^{-3/2}\int\frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}}\left[a^\mu(\mathbf{p})e^{ipx} + a^{\mu *}(\mathbf{p})e^{-ipx}\right], \\
\omega(x) &= (2\pi)^{-3/2}\int\frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}}\left[c(\mathbf{p})e^{ipx} + c^*(\mathbf{p})e^{-ipx}\right], \\
\omega^*(x) &= (2\pi)^{-3/2}\int\frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}}\left[b(\mathbf{p})e^{ipx} + b^*(\mathbf{p})e^{-ipx}\right],
\end{aligned}
$$

und Koeffizientenvergleich in $[Q,\Phi] = is\Phi$ führt zu den Regeln für die Geistererzeugungsoperatoren: $[Q,b^*] = p^\mu a_\mu^*$ und $[Q,c^*] = 0$, d.h.

$$Qb^*(\mathbf{p})\,|\psi\rangle = p^\mu a_\mu^*(\mathbf{p})\,|\psi\rangle \neq 0 \qquad \text{(Antigeister sind nicht im Kern von } Q\text{)},$$
$$c^*(\mathbf{p})\,|\psi\rangle = Qp^\mu a_\mu^*(\mathbf{p})\,|\psi\rangle\,/e_\mu p^\mu \qquad \text{(Geister sind BRST-exakt)},$$

[1] Ich erlaube mir hier, diese Variable, da wir sie sowieso gleich wieder wegwerfen, mit dem Devanāgarī (Sanskrit) Buchstaben 'gha' zu bezeichnen, zu Ehren von Hermann Grassmann (1809–1877), der neben Mathematiker auch Sanskrit-Gelehrter war.

für e_μ beliebig mit $e_\mu p^\mu \neq 0$. Auferlegung der Physikalitätsbedingung

$$|\psi_{phys}\rangle \in \text{Kern}(Q) \text{ mod Bild}(Q)$$

liefert also das Resultat, daß der physikalische Zustandsraum geist- und antigeistfrei ist (Im Pfadintegral geschieht die Quantisierung quasi automatisch, im Gegensatz zum *fiat Fock* der kanonischen Quantisierung).

Wir sind in diesem Abschnitt ausgehend von der Faddeev-Popov-Methode auf die BRST-Symmetrie gestoßen; wir werden aber weiter unten sehen, wie BRST eine Verallgemeinerung von FP darstellt und uns gleichsam von FP unabhängig machen.

3 Batalin-Vilkovisky-Formalismus

Eine elegante Art, mit der BRST-Symmetrie zu arbeiten und sie gar zu verallgemeinern, bietet der *Batalin-Vilkovisky-Formalismus* [5]. Die Grundidee ist, zu allen unseren Feldern – Masse- Eich- Geister- Antigeister- und Hilfsfeldern, die wir summarisch mit χ^n bezeichnen wollen – Antifelder $\chi_n^\heartsuit$ von umgekehrter Statistik einzuführen. Damit definieren wir eine neue Wirkung

$$S[\chi, \chi^\heartsuit] := I[\phi] + (s\chi^n)\chi_n^\heartsuit$$

(I ist die ursprüngliche eichinvariante und geistfreie Wirkung, ϕ bezeichnet Masse- und Eichfelder). S erfüllt die sogenannte *master equation*:

$$\frac{\delta_R S}{\delta \chi_n^\heartsuit}\frac{\delta_L S}{\delta \chi^n} = 0,$$

wo 'R' und 'L' für Rechts- bzw. Linksableitung stehen. Beachte, daß wir für die Wahl $\chi_n^\heartsuit = \delta\Psi[\chi]/\delta\chi^n$ für ein fermionisches Funktional Ψ mit Geisterzahl -1 wieder unsere alte FP-Wirkung $S[\chi, \chi^\heartsuit] = I[\phi] + s\Psi[\chi]$ zurückerhalten. Um unsere Notation weiter zu verschönern, führen wir die *Antiklammer* zweier allgemeiner Funktionale F und G in den Feldern und Antifeldern ein:

$$(F, G) := \frac{\delta_R F}{\delta \chi^n}\frac{\delta_L G}{\delta \chi_n^\heartsuit} - \frac{\delta_R F}{\delta \chi_n^\heartsuit}\frac{\delta_L G}{\delta \chi^n}.$$

Sie erfüllt $(\chi^n, \chi_m^\heartsuit) = \delta_m^n$ und $(\chi^n, \chi^m) = (\chi_n^\heartsuit, \chi_m^\heartsuit) = 0$. Die *master equation* nimmt nun die Gestalt an:

$$(S, S) = 0.$$

Die *verallgemeinerte* (oder *volle*) BRST-Transformation definieren wir mit

$$\mathsf{s}\chi_n := -(S, \chi^n), \quad \mathsf{s}\chi_n^\heartsuit := -(S, \chi_n^\heartsuit).$$

Die *master equation* besagt nun also genau, daß die Wirkung S BRST-invariant ist: $\mathsf{s}S = 0$. Mit einer Jacobi-Identität für die Antiklammer auch die Nilpotenz $\mathsf{s}^2 = 0$. Wenn wir jetzt die Argumentation umkehren, und annehmen, wir seien auf der Suche nach Wirkungen, die die *master equation* erfüllen, finden wir, daß diese S nicht eindeutig bestimmt, sondern erfüllt bleibt nach einer infinitesimalen Transformation $S' = S + (\delta F, S)$, mit δF einem infinitesimalen fermionischen Funktional mit Geisterzahl -1 (solche Transformationen heißen auch *antikanonische Transformationen*). Daraus folgt insbesondere, daß wir, wenn wir die

Antifelder wie oben als $\chi_n^\heartsuit = \delta\Psi[\chi]/\delta\chi^n$ ansetzen, sie gleich wieder zu Null wegtransformieren können. Wenn wir nun fordern, daß die Matrixelemente unabhängig von Ψ sein sollen, finden wir für den Effekt δZ einer Variation $\delta\Psi$ von Ψ auf die Vakuum-Vakuum-Amplitude

$$Z = \int \chi \exp\left(iS\left[\chi^n, \frac{\delta\Psi[\chi]}{\delta\chi^n}\right]\right)$$

nach partieller Integration die folgende Formel:

$$\delta Z = \int \chi \exp(iS)\left(\frac{\delta_R S}{\delta\chi_n^\heartsuit}\frac{\delta_L S}{\delta\chi^n} - i\Delta S\right)_{\chi^\heartsuit=\frac{\delta\Psi}{\delta\chi}} \delta\Psi;$$

$$\Delta = \frac{\delta_R}{\delta\chi_n^\heartsuit}\frac{\delta_L}{\delta\chi^n}.$$

Wir sehen also, daß unsere Forderung nicht die *master equation* liefert, sondern die sogenannte *Quanten-Masterequation*

$$(S,S) - 2i\hbar\Delta S = 0.$$

Den Faktor $\hbar$ schreiben wir explizit zur Demonstration, daß dies zu nullter Ordnung in $\hbar$ noch immer der klassischen *master equation* entspricht. In diesem Unterschied der Bedingungen an die Theorie vor und nach der Quantisierung treffen wir zum ersten Mal einen Hinweis auf das leidige Thema der *Anomalien.* Von einer Anomalie spricht man, wenn die Theorie sich nach der Quantisierung plötzlich nicht mehr an Symmetrien hält, die sie zuvor erfüllte, also in unserem Fall die *master equation* verletzt. Ist letztere aber erfüllt, können wir getrost darauf bauen, daß alle physikalischen Erwartungswerte vom Eichfixierungsfermion Ψ unabhängig sind (vgl. auch Henneaux & Teitelboim [16, §14.1]).

4 Die Methode der effektiven Quantenwirkung

Bevor wir uns der Renormierung von Yang-Mills-Theorien zuwenden, verlieren wir ein paar Worte über QFT in Anwesenheit eines klassischen äußeren Feldes. Wir werden so auf eine schöne Methode stoßen, alle Feynman-Diagramme mit allen möglichen Schleifen zu berücksichtigen, obwohl wir explizit nur schleifenlose Graphen addieren. Die Vakuum-Vakuum-Amplitude (das Erzeugende Funktional) in Anwesenheit von Strömen $J_r(x)$, die an die ϕ_r koppeln, ist

$$Z[J] = \int \phi \exp\left(iI[\phi] + i\int d^4x\, \phi^r J_r\right)$$

(mit Farb-Index r). $Z[J]$ ist die Summe aller Diagramme

$$Z[J] = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!}(iW[J])^N = \exp(iW[J]),$$

mit $iW[J]$ der Summe aller *zusammenhängenden* Diagramme. Der Faktor $N!$ kommt von Diagrammen, die bis auf Permutation der Vertices identisch sind.

Wir definieren ϕ^r_J als Vakuumerwartungswert von ϕ^r in Anwesenheit von J,

$$\phi^r_J := -\frac{i}{Z[J]}\frac{\delta}{\delta J_r(x)}Z[J].$$

Die ϕ^r_J und die J_r sind konjugiert im Sinne

$$\phi^r_J = \frac{\delta}{\delta J_r}W[J] \quad \text{oder} \quad \phi^r =: \frac{\delta}{\delta J_{\phi r}}W[J],$$

wobei wir im zweiten Ausdruck den Spieß umdrehen und $J_{\phi r}$ von ϕ^r abhängen lassen. Die *effektive Quantenwirkung* $\Gamma[\phi]$ ist definiert als die Legendretransformation von $W[J]$:

$$\Gamma[\phi] := W[J_\phi] - \int d^4x\, \phi^r J_{\phi r}.$$

Diese Bezeichnung wird klarer, wenn man nachprüft, daß

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi^r} = -J_{\phi r},$$

also die physikalischen Feldkonfigurationen – nämlich diejenigen mit $J_\phi = 0$ – den stationären Punkten von Γ entsprechen, völlig analog zur Euler-Ableitung in der klassischen Mechanik!

Weinberg [12, §16.1] zeigt außerdem, indem er alle Schleifen im Limes einer verschwindenden Kopplungskonstante hinausfiltert, daß Γ gerade der Summe aller Ein-Teilchen-irreduziblen (1PI) Diagramme entspricht, und somit muß man für die Berechnung von $W[J]$ nur noch die schleifenlosen 'Baum-Graphen' berücksichtigen:

$$iW[J] = \int_{\text{Bäume}} \phi \, \exp\left(i\Gamma[\phi] + i\int d^4x\, \phi^r J_r\right).$$

Das heißt wir haben die klassische Wirkung I durch Γ ersetzt, um Quanteneffekte (Schleifen) zu berücksichtigen: Γ ist effektiv eine 'Quantenwirkung'! Das alles hat offenbar eine Menge mit Renormierung zu tun, denn die Schleifen mit all ihren Unendlichkeiten stecken nun in Γ drin, und die Koeffizienten einer Entwicklung von Γ kann man als renormierten Kopplungskonstanten einer nunmehr schleifenlosen Theorie auffassen.

5 Slavnov-Taylor-Identitäten

Wenn wir eine Theorie renormieren wollen, ist es unabdingbar, daß die effektive Quantenwirkung dieselben Symmetrien aufweist wie die Wirkung selbst. Sonst könnten ja in der ersteren Divergenzen auftauchen, die wir nicht durch Manipulation letzterer abfangen können, weil uns durch ihre reicheren Symmetrieeigenschaften die Hände gebunden sind. Nehmen wir also an, unsere Wirkung sei invariant unter einer ortsabhängigen infinitesimalen Transformation der Felder χ^n:

$$\chi \xrightarrow{n} \chi^n + \varepsilon F^n[x, \chi].$$

Fordert man diese Invarianz von der Vakuum-Vakuum-Amplitude $Z[J]$, findet man die Identität

$$\int d^4x \, \langle F^r \rangle_J \, J_r = 0,$$

mit $\langle \, \rangle_J$ dem Quanten-Mittel in Anwesenheit von J:

$$Z[J] \, \langle F(x) \rangle_J := \int \phi F[x, \chi] \exp\left(iI[\phi] + i \int d^4y \, \phi^s J_s \right); \quad \langle 1 \rangle_J = 1.$$

Im Falle $J \to 0$ liefert uns $\langle \, \rangle_0$ gerade den Vakuumerwartungswert. Mit Hilfe der effektiven Quantenwirkung läßt sich unsere Identität auch schreiben als

$$\int d^4x \, \langle F^r(x) \rangle_J \, \frac{\delta \Gamma[\chi]}{\delta \chi^r(x)} = 0,$$

oder als Invarianz von Γ unter

$$\chi^n \mapsto \chi^n + \varepsilon \, \langle F^n \rangle_J \, .$$

Solche Identitäten heißen *Slavnov-Taylor-Identitäten.* Es besteht hier eine enge Verwandtschaft zu den Ward-Takahashi-Identitäten, wo wir Eichinvarianz direkt von der Vakuum-Vakuum-Amplitude fordern. Die Frage ist nun wie gesagt, ob diese Symmetrie dieselbe sei wie die ursprüngliche der Wirkung. Man kann zeigen, daß dies der Fall ist, falls die Generatoren F *linear* in den Feldern χ sind. Nun ahnen wir aber erst, was wir uns mit der BRST-Symmetrie eingebrockt haben, die ja (außer für ω^* und h) überhaupt nicht linear ist.

Betrachten wir also etwas näher, was die BRST-Invarianz der Wirkung für die effektive Quantenwirkung bedeutet. Die entsprechende Slavnov-Taylor-Identität lautet

$$\int d^4x \, \langle s\chi^n \rangle_J \, \frac{\delta_L \Gamma[\chi]}{\delta \chi^n} = 0.$$

Um diesen Sachverhalt halbwegs brauchbar ausdrücken zu können, verwenden wir (d.h. [12]) gerissenerweise fiktive äußere Felder K_n, die an $s\chi^n$ koppeln und die die Rolle von BV-Antifeldern übernehmen, und definieren W und Γ neu:

$$\Gamma[\chi, K] := W[J_{\chi,K}, K] - \int d^4x \, \chi^n J_{\chi,K,n},$$

$$e^{iW[J,K]} := \int \chi^n \exp i \left(iI + \int dx \, (s\chi^n) K_n + \int dx \, \chi^n J_n \right),$$

ausgewertet an derjenigen Stelle $J_{\chi,K}$, an der gilt

$$\left. \frac{\delta_R W[J, K]}{\delta J_n} \right|_{J = J_{\chi,K}} = \chi^n.$$

Derart bewaffnet können wir unsere Identität auf folgende Form bringen:

$$\int d^4x \, \frac{\delta_R \Gamma[\chi, K]}{\delta K_n} \frac{\delta_L \Gamma[\chi, K]}{\delta \chi^n} = 0.$$

Dies ist die *Zinn-Justin-Gleichung.* Im BV-Formalismus entspricht diese Bedingung gerade der *master equation*

$$(\Gamma,\Gamma)_{\chi^\heartsuit=K}=0,$$

aber notabene als Bedingung an Γ und nicht an die ursprüngliche Wirkung S. Dieses Resultat ist wichtig für das Studium von Renormierbarkeit und von Anomalien.

6 BRST und Renormierung

Der historische Beweis der Renormierbarkeit von Yang-Mills-Theorien (t'Hooft 1971 [6]) geht von den ST-Identitäten der Eichinvarianz aus und ist lange und verschlungen (und hat seinen Autor mit einem Schlag berühmt gemacht). Mit der Entdeckung ihrer Symmetrie ermöglichten Becchi, Rouet und Stora 1975 einen knapperen Beweis [1], dessen Logik hier skizziert werden soll.

Unser Ziel ist, die Wirkung S zu schreiben als Summe $S[\chi,K]=S_R[\chi,K]+S_\infty[\chi,K]$, wo S_R die renormierten Massen und Kopplungskonstanten enthält und S_∞ (unendliche) Terme, die die Divergenzen von Schleifengraphen (bzw. von Γ) abfangen. Beide Teile, S_R und S_∞ müssen immer noch allen Symmetrien von S gehorchen. Renormierbarkeit haben wir dann, wenn das möglich ist, d.h. wenn die Divergenzen von Γ sich auch an diese Symmetrien halten. Leider wissen wir über Γ nicht sehr viel; es handelt sich um ein kompliziertes nichtlokales Funktional, für das wir keine explizite Darstellung kennen. Etwas abstrakt schreiben wir Γ als Entwicklung nach der Schleifenanzahl N:

$$\Gamma[\chi,K]=\sum_{N=0}^{\infty}\Gamma_N[\chi,K],$$

mit $\Gamma_0=S_R<\infty$. Die Zinn-Justin-Gleichung wird dann

$$\sum_{N'=0}^{N}(\Gamma_{N'},\Gamma_{N-N'})=0.$$

Wenn wir annehmen, alle Divergenzen in $M<N$ Schleifen seien bereits behoben, bietet nur der Term $N'=N$ (und der identische mit $N'=0$) etwas Neues, nämlich $(S_R,\Gamma_{N,\infty})=0$ für den unendlichen Anteil $\Gamma_{N,\infty}$ von Γ_N. Für Renormierbarkeit im klassischen Sinne verlangen wir, daß alle Terme der Lagrangedichte (und damit der Divergenzen) von der Dimension ≤ 4 sind (Dyson 1949). Eine Untersuchung der Dimensionen der Felder zeigt, daß $\Gamma_{N,\infty}$ höchstens linear in den K_n sein kann. Zinn-Justin (plus BRST-Invarianz von S_R) läßt sich damit in eine Invarianz für die 'korrigierte Wirkung' $\Gamma_N^\varepsilon[\chi]=S_R[\chi]+\varepsilon\Gamma_{N,\infty}[\chi,0]$ unter der Transformation generiert durch s':

$$\begin{aligned}
s'\psi &= i\mathcal{Z}t_a\omega_a\psi,\\
s'A_{a\mu} &= \mathcal{Z}[\mathcal{N}\partial_\mu\omega_a+C_{abc}A_{b\mu}\omega_c],\\
s'\omega_a^* &= -h_a,\\
s'\omega_a &= -\tfrac{1}{2}\mathcal{Z}C_{abc}\omega_b\omega_c,\\
s'h_a &= 0.
\end{aligned}$$

umformen. Bis auf die Renormierungskonstanten $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{N}$ ist das aber genau wieder die BRST-Operation. Der Punkt ist nun, daß, wie bei der Untersuchung von $\langle\,\rangle_J$ erwähnt, Γ_N^ϵ sich an alle Symmetrien von S halten muß, die linear erzeugt sind. Außerdem ist (im Gegensatz zu Γ) Γ_N^ϵ von der Form $\Gamma_N^\epsilon = \int d^4x \mathcal{L}_N^\epsilon$. Die linearen Symmetrien der FP-Lagrangedichte (mit Eichung $f_a = \partial_\mu A_a^\mu$)

$$\mathcal{L}_{\mathrm{FP}} = \mathcal{L} - \tfrac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_a^\mu)(\partial_\nu A_a^\nu) - \partial_\mu \omega_a^* \partial^\mu \omega_a + C_{abc}(\partial_\mu \omega_a^*) A_c^\mu \omega_b$$

sind

- Lorentz-Invarianz – manifest (ursprüngliche Motivation für FP);
- Globale Eichinvarianz – $\lambda_a(x) \equiv \epsilon_a$;
- Antigeist-Translationsinvarianz – ω^* erscheint nur als Gradient;
- Geisterzahlerhaltung – ω und ω^* treten nur gepaart auf;

Mit 'roher Gewalt' kann man herleiten, daß die allgemeinste renormierbare Lagrangedichte mit diesen Eigenschaften plus s'-Invarianz bis auf wählbare Konstanten gerade wieder von der Form $\mathcal{L}_{\mathrm{FP}}$ ist. In jeder Ordnung N können aber diese Konstanten so angepasst werden, daß $\Gamma_N^\epsilon = S_R$ und damit $\Gamma_{N,\infty} = 0$.

Dies befriedigt jedoch nicht völlig: Die oben erwähnte Antigeist-Translationsinvarianz ist nur ein Produkt unserer Eichwahl. Abwesenheit dieser Symmetrie würde neuartige Terme ermöglichen, im Bild und damit im Kern von s', etwa von der Form

$$C_{abc} s'(\omega_\alpha^* \omega_\beta^* \omega_\gamma) = C_{abc}(2h_a \omega_b^* \omega_c + \tfrac{1}{2}\mathcal{Z} C_{cde} \omega_a^* \omega_b^* \omega_d \omega_e),$$

also von vierter Ordnung in den Geisterfeldern. FP liefert aber niemals Vier-Geister-Vertices, und so können wir den Ultraviolett-Divergenzen solcher Terme nichts entgegensetzen. Dieses Problem ist tiefer als eine bloße Frage der Eichwahl, und FP hält keine Antwort darauf. Wenn wir nicht alle Eichungen außer $f_a = \partial_\mu A_a^\mu$ verbieten wollen – was nicht mehr viel zu tun hätte mit der Philosophie einer Eichtheorie – bleibt uns nichts anderes übrig, als unsere Theorie zu verallgemeinern, und neu von der Wirkung nur noch BRST-Invarianz zu verlangen, $S = I_0 + s\Psi$ mit I_0 geistfrei mit $sI_0 = 0$ und Ψ ohne weiteres von höherer Ordnung in den Geistern, da die S-Matrix sowieso Ψ-unabhängig sein soll. Dieses Prozedere ist die BRST-*Quantisierung.*

Kehren wir also zurück zum BV-Formalismus und auferlegen der Wirkung die Quanten-Masterequation $(S,S) - 2i\Delta S = 0$. Außerdem soll S einer bestimmten Symmetrie genügen – im Falle einer Theorie etwa, die von einer geschlossenen Eichalgebra ausgeht, muß die Wirkung von der Form

$$S = I[\phi] + \omega^A f_A^r[\phi]\phi_r^\heartsuit + \tfrac{1}{2}\omega^A\omega^B f_{AB}^C[\phi]\omega_C^\heartsuit - h^A \omega_A^{*\heartsuit} \qquad (*)$$

sein (in der kondensierten De Witt Notation; die Indizes enthalten schon die Raumkoordinaten und Kontraktion impliziert Integration). S sei entwickelbar nach $\hbar$: $S = S_R + \hbar S_1 + \hbar^2 S_2 + \ldots$, wobei S_R die renormierte Wirkung ist und die S_N unendliche Konterterme. Die Quanten-Masterequation soll für alle Ordnungen von $\hbar$ gelten, also $(S_R, S_R) = 0$ und

$$(S_R, S_N) = -\frac{1}{2}\sum_{M=1}^{N-1}(S_M, S_{N-M}) + i\Delta S_{N-1}.$$

Die renormierten Felder und Antifelder dürfen wir definieren durch eine (beliebige) antikanonische Transformation der ursprünglichen Felder. Eine endliche antikanonische Transformation wird generiert durch ein erzeugendes Funktional $F(t)$ gemäß $G \mapsto G' \equiv G(1)$; $G(t+\delta t) = G(t) + (F(t)\delta t, G(t))$ mit $G \equiv G(0)$ einem beliebigen Funktional in Feldern und Antifeldern. Die transformierte Wirkung $S(F)$ sieht dann aus wie

$$S(F) = S_R + \hbar[S_1 + (F_1, S_R)] + \hbar^2[S_2 + \ldots] + \ldots,$$
$$F(t) = \sum_n (\hbar t)^n F_n.$$

Die Frage ist nun, ob wir unser F bzw. seine Taylorkoeffizienten F_n so wählen können, daß die transformierte (d.i. die renormierte) Wirkung S' alle Divergenzen aus Schleifengraphen kontert.

Nehmen wir an, wir haben eine Lösung der Quanten-Masterequation, S_N^0. Sofort gibt es dann eine Klasse von anderen Lösungen $S_N = S_N^0 + S_N'$, mit einem S_N' mit den Eigenschaften, daß $S_R + S_N'$ der Einschränkung $(*)$ der Theorie gehorcht und daß $(S_R, S_N') = 0$. Unser $\Gamma_{N,\infty}$ ist also von der Form

$$\Gamma_{N,\infty} = S'_{N,\infty} + (F_{N,\infty}, S_R) + X_{N,\infty};$$

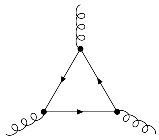
X_N ist noch unbekannt, hängt aber nicht von S_N' oder F_N ab. Weil die BRST Operation $\mathsf{s}\colon F \mapsto (S_R, F)$ nilpotent ist, finden wir $(S_R, X_{N,\infty}) = 0$. So können alle Terme von $X_{N,\infty}$ mit der Form (S_R, Y) durch die Wahl $F_{N,\infty} = Y$ gekontert werden. Der Raum der verbleibenden möglichen unendlichen Terme von $X_{N,\infty}$ sind Funktionale $\{X | (S_R, X) = 0\}$, modulo Terme (S_R, Y). Das heißt: Die Divergenzen in Γ_N, die durch die Konterterme S_N' neutralisiert werden müssen, liegen in der Kohomologie der Abbildung $\mathsf{s}\colon X \mapsto (S_R, X)$. Die möglichen S_N' sind eingeschränkt durch die Bedingung, daß $S_R + S_N'$ der Anforderung $(*)$ an die Theorie gehorchen müssen. *Die Renormierbarkeit einer Theorie ist also bewiesen, wenn man zeigen kann, daß die Kohomologie von s nur Funktionale von der Form* $(*)$ enthält. Für Yang-Mills-Theorien ist dies der Fall (siehe [7]).

7 Anomalien

Natürlich ist hier kein Platz, irgendetwas über Anomalien halbwegs sauber zu berechnen. Historisch ist als erste die chirale Anomalie aufgetaucht (Sutherland 1966), und zwar im Zusammenhang mit dem Zerfall $\pi^0 \to 2\gamma$. Für diesen Prozeß tauchen in Störungstheorie ab fünfter Ordnung Fermionendreiecke auf, die der Ward-Identität zur Erhaltung des axialen Stromes nicht mehr genügen (diese schockierende Tatsache wird formal durch den Effekt einer (verbotenen) Variablensubstitution in einem divergenten Integral verursacht). Dies zerstört auf den ersten Blick die Renormierbarkeit, und die einzige Hoffnung zur Rettung der Theorie ist, daß die Anomalien der verschiedenen beteiligten Fermionen sich gerade aufheben (das Dreieck ist ja nur durch Eichbosonen mit dem Rest des Diagramms verbunden und erscheint deshalb für alle Fermionen-Aromata der Theorie). Diese Bedingung von Adler, Bell und Jackiw (chirale Anomalien heißen auch ABJ-Anomalien) führt auf die Bedingung, daß die Summe der Ladungen aller Fermionen verschwindet; und tatsächlich

$$Q_e + Q_{\nu_e} + 3(Q_u + Q_d) = 1 + 0 + 3(\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3}) = 0 \quad \text{(3 Farben)}.$$

Das ist ein hübscher Einblick, weshalb die Leptonen und die Quarks immer in Generationen auftreten, sagt aber nichts über die Anzahl der Generationen aus (vergleiche auch Ryder [13, §9.10]).



Dreieckgraph, der die chirale Symmetrie verletzt

Was aber hat das alles mit BRST zu tun? Die Berechnung von Anomalien läßt sich besonders elegant im BV Antifeld-Formalismus durchführen. In Anwesenheit einer Anomalie verschwindet die Antiklammer (Γ, Γ) nicht mehr, sondern es gilt (in Ein-Schleifen-Ordnung)

$$(S, \Gamma_1) = G_1.$$

Wenn S die klassische *master equation* erfüllt, wissen wir schon, daß G_1 geschlossen ist, $(S, G_1) = 0$. Wäre nun G_1 auch noch exakt, $G_1 = (S, F_1)$ für ein *lokales* Funktional F_1 (lokal im Sinne eines Integrals einer Funktion von Feldern und Ableitungen von Feldern; Γ_1 ist nicht lokal), könnten wir F_1 von der Wirkung subtrahieren und so die Anomalie zum Verschwinden bringen. Kandidaten für ernsthafte Anomalien liegen also in der Kohomologie der BRST-Operation $\mathsf{s} : X \mapsto (S, X)$ auf dem Raum der lokalen Funktionale in Feldern und Antifeldern. Wenn wir die Antifelder gleich Null setzen, und weil $\mathsf{s}\chi^n = (\delta\Gamma_1/\delta\chi^n)_{\chi^\heartsuit=0}$, folgt für die Anomalie, daß $sG_1 = 0$. Dies ist die sogenannte *Wess-Zumino-Konsistenzbedingung* [8] an die Anomalie. Dieses Spiel läßt sich auch auf höhere Ordnungen ausdehnen: Nehmen wir an, die Kohomologie von s sei leer, und manipulieren wir die Wirkung derart, daß $G_1 = 0$. Eine Anomalie, die die *master equation* in Zwei-Schleifen-Ordnunug verletzt, wäre von der Form

$$(\Gamma_1, \Gamma_1) + 2(S, \Gamma_2) = G_2,$$

aber weil bereits $(S, \Gamma_1) = 0$ und $(S, S) = 0$, wird ein jedes solche G_2 erfüllen: $(S, G_2) = 0$, und mit analoger Argumentation kann man das Resultat auf alle Ordnungen ausdehnen.

In der Interpretation von Fujikawa [9] entsprechen Anomalien der Veränderlichkeit des Maßes χ^n unter Symmetrietransformationen. Diese Invarianz haben wir aber stillschweigend angenommen bei der Einführung der Slavnov-Taylor-Identitäten. Wenn also χ^n nicht invariant ist, bzw. wenn $\Delta S \neq 0$, können wir Zinn-Justin nur retten, wenn wir Terme zu S addieren, um die Veränderungen des Maßes auszugleichen. Diese Terme werden aber die klassische *master equation* $(S, S) = 0$ verletzen, und es stellt sich heraus, daß wir genau wieder bei der Quanten-Masterequation $(S, S) = 2i\Delta S$ landen (Δ war der Operator $\frac{\delta_R}{\delta\chi_n^\heartsuit}\frac{\delta_L}{\delta\chi^n}$).

8 Geometrischer Zugang

Für ein tieferes Verständnis der BRST-Transformation führen wir hier die geometrische Interpretation aus Nakahara [17, §13.4] an. Stellen wir uns vor, wir haben die Eichgruppe G und definieren $\Omega^m(G)$ als die Menge aller Abbildungen $S^m \to G$ (Die m-Sphäre S^m entspricht der kompaktifizierten m-dimensionalen euklidischen Raumzeit). Auf dieser Menge wollen wir den BRST-Operator s definieren. Wenn $\Omega^m(G)$ durch λ^α parametrisiert wird, setzen wir $s = d\lambda^\alpha \partial_{\lambda^\alpha}$. s und d (die gewöhnliche äußere Ableitung) sollen 'Antiableitungen' sein:

$$d^2 = s^2 = ds + sd = 0.$$

Wir definieren den Faddeev-Popov-Geist als

$$\omega := g^{-1} sg; \qquad g = g(\lambda^\alpha) \in \Omega^m(G).$$

Sei nun $\mathfrak{A}$ der Raum aller Eichfeldkonfigurationen auf S^m. Diejenigen Elemente von $\mathfrak{A}$, die durch eine G-Eichtransformation verbunden sind, entsprechen demselben physikalischen Zustand. Der physikalische Zustandsraum ist also $\mathfrak{A}/\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G} = \Omega^m(G)$ dem Raum aller Eichtransformationen auf S^m. $\mathfrak{A}/\mathfrak{G}$ nennt man den *Moduli-Raum* der Eichtheorie. Ein Element $\mathbb{A}$ von $\mathfrak{A}$ transformiert wie folgt:

$$g(\lambda^\alpha) : \mathbb{A} \mapsto A(\lambda^\alpha) := g^{-1}(\mathbb{A} + d)g.$$

Was s betrifft findet man $sA = -\omega A - A\omega - d\omega =: -\mathbb{D}_A \omega$ und $s\omega = -\omega^2$. A definiert die Feldstärke $F := dA + A^2$ und $F = g^{-1} \mathbb{F} g$, falls $\mathbb{F} = d\mathbb{A} + \mathbb{A}^2$. $s\mathbb{A}$ verschwindet, weil $\mathbb{A}$ nicht von λ^a abhängt. $\mathfrak{A}$ kann als Faserbündel aufgefaßt werden mit der Faser $\mathfrak{G}$, aufgrund der natürlichen Projektion $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/\mathfrak{G}$. Sei nun $a \in \mathfrak{A}$ ein Repräsentant der Klasse $[a] \in \mathfrak{A}/\mathfrak{G}$, und sei

$$\mathcal{A}(x) = g^{-1}(x)(a(x) + d)g(x)$$

ein Element von $\mathfrak{A}$ in $[a]$. Weiter bezeichne δ die äußere Ableitung in $\mathfrak{A}$ (d wirkt nur auf $\mathfrak{G}$), d.i. die Variation von Eichfeldkonfigurationen. Wir finden

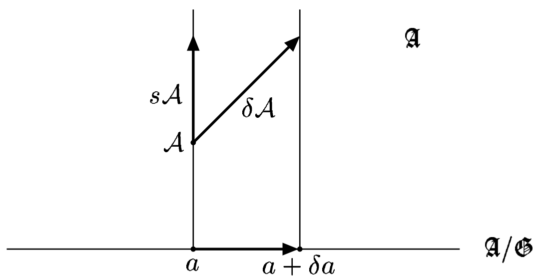
$$\delta\mathcal{A} = g^{-1} \delta a g - \mathbb{D}_{\mathcal{A}}(g^{-1}\delta g).$$

Der erste Term stellt die Komponente von $\delta\mathcal{A}$ auf dem Moduli-Raum $\mathfrak{A}/\mathfrak{G}$ dar, der zweite entspricht folglich der Variation entlang der Faser durch a. Er hat aber außerdem gerade die Form, die wir für den BRST-Operator gefunden hatten:

$$\delta\mathcal{A}|_{\text{Faser}} = -\mathbb{D}_{\mathcal{A}}\omega = s\mathcal{A},$$

$$\delta\omega|_{\text{Faser}} = -g^{-1}sgg^{-1}sg = -\omega^2 = s\omega.$$

Becchi selbst führt in [10][2] seinen Operator ein als d_V, die vertikale äußere Ableitung, das heißt den Operator auf $\mathfrak{A}$, der in jedem Punkt mit der äußeren Ableitung auf dem Orbit identifiziert ist.



Der BRST-Operator restringiert die Variation der Eichfeldkonfiguration auf die Faser.

[2] *Introduction to BRS Symmetry*, Vortrag an der ETH Zürich im Mai 1996.

9 BRST-Quantisierung und Stringtheorie

Zum Abschluß riskieren wir unter der Führung von Kaku [18] und Schwarz [11][3] einen kurzen Ausflug in die Stringtheorie. Obwohl es sich hier um eine ganz andere Welt handelt, können wir einen Großteil unseres Vokabulars direkt exportieren. Gerade der BRST-Formalismus ist hier fast noch heimischer als in der QFT und eröffnet uns viele Zusammenhänge, die sonst nur viel schwerer zugänglich wären, wie etwa das esoterisch anmutende Resultat, daß die Stringtheorie nur in einer sechsundzwanzigdimensionalen Raumzeit konsistent ist.

Ein *Nambu-Goto-String* ist ein ausgedehntes, eindimensionales Objekt $X_\mu(\sigma)$, das in der Raumzeit propagiert. Die *Weltfläche* eines Strings ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit $X_\mu(\sigma,\tau)$, parametrisiert durch die Variablen σ und τ. Die Kontraktion der Tangentialvektoren $\partial_\sigma X_\mu$ und $\partial_\tau X_\mu$ liefert eine Metrik:

$$g_{ab} = \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu; \quad (a, b = \sigma, \tau).$$

Die Wirkung des Strings ist definiert als die von ihm überstrichene Fläche

$$S = \int d\sigma d\tau L(\sigma,\tau),$$

$$L \propto \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu = \sqrt{(\partial_\tau X_\mu)^2 (\partial_\sigma X^\mu)^2 - (\partial_\tau X_\mu \partial_\sigma X^\mu)^2}.$$

Diese Wirkung ist invariant unter einer Reparametrisierung des Strings sowie unter Weyl-Skalierung der Metrik $g^{ab} \mapsto \Lambda(\sigma,\tau) g^{ab}$. Diese gewaltige Freiheit der Wahl der Parametrisierung ist worin sich ein String wesentlich von einem Punktteilchen unterscheidet. Sie erlaubt es uns, die Metrik zur flachen Minkowski-Metrik umzuformen, $g_{ab} = \eta_{ab}$, resultiert aber in der Bedingung $(\partial_\sigma X \pm \partial_\tau X)^2 = 0$. Eine Fourieranalyse dieser Bedingung ergibt eine unendliche Anzahl von Bedingungen $L_n^\alpha = 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Die L_n^α besitzen zudem algebraische Struktur und generieren die *Virasoro Algebra.* In der Quantentheorie spielt L_0^α die Rolle des Hamiltonoperators und bedarf Normalordnung (*cluster decomposition* [12, §4]): $L_0^\alpha = \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum \alpha_{\mu\, m} \alpha_{-m}^\mu$ (die α_m^μ sind die Fourierkoeffizienten von X^μ). Die Struktur der Kommutatoralgebra ist $[L_m^\alpha, L_n^\alpha] = (m-n) L_{m+n}^\alpha + A^\alpha(m)\delta_{m+n,0}$ mit Anomalieterm $A^\alpha(m) = \frac{D}{12}(m^3 - m)$, der von der Dimensionalität D der Raumzeit abhängt, und der im klassischen Fall (Poissonklammer) natürlich fehlt.

Es ist eine wichtige Tatsache, daß man aus *irgendeiner* Lie-Algebra mit Kommutationsregeln $[\lambda_m, \lambda_n] = f_{mn}^p \lambda_p$ einen nilpotenten Operator Q aus fermionischen Operatoren ω_n und ω_m^* konstruieren kann:

$$Q = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_{-n}[\lambda_n - \tfrac{1}{2} f_{nm}^p \omega_{-m} \omega_p^*]; \quad \{\omega_n, \omega_m^*\} = \delta_{n,-m}.$$

Führen wir also die Geister $\omega(\sigma)$ und $\omega^*(\sigma)$ mit den Fourierkoeffizienten ω_n und ω_n^* ein, können wir den BRST-Operator definieren als

$$Q = \sum_m L_{-m}\omega_m - \tfrac{1}{2}\sum_m (m-n) :\omega_{-m}\omega_{-n}\omega_{m+n}^*: - a\omega_0.$$

[3] *Faddeev-Popov Ghosts and BRS Symmetry in String Theories*, ein Artikel in einem Sonderband zu Ehren des 65. Geburtstages von Yoichiro Nambu, eines der Pioniere der Stringtheorie.

Nach der Quantisierung gilt jedoch nicht mehr unbedingt $Q^2 = 0$, sondern wir kriegen einen Beitrag der Geister zur Anomalie. Das Ziel ist natürlich, daß dieser die ursprüngliche Anomalie gerade aufhebt. Wir definieren die Quanten-Virasoro-Operatoren $L_m = \{Q, \omega^*_m\} = L^\alpha_m + \sum(m-n) : \omega^*_{m+n}\omega_{-n} : -a\delta_{m,0}$ mit Geister-Anomalieterm $A^\omega(m) = \frac{1}{6}(m - 13m^3) + 2am$. Insgesamt haben wir damit die Anomalie

$$A(m) = A^\alpha(m) + A^\omega(m) = \tfrac{1}{12}D(m^3 - m) + \tfrac{1}{6}(m - 13m^3) + 2am.$$

Damit der Beitrag der Geister die Anomalie beseitigt, benötigen wir $a = 1$ und $D = 26$; die Theorie ist nur anomaliefrei in 26-dimensionaler Raumzeit. In diesem Sinne kann man die Plage der Anomalien sogar als *blessing in disguise* verstehen – das Plethora möglicher Theorien wird eingegrenzt auf einige wenige wirklich konsistente, am Ende vielleicht gar eine einzige?

*

Literatur

[1] C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, *Comm. Math. Phys.* **42**, 127 (1975), *Ann. Phys.* **98**, 287 (1976).

[2] I. V. Tyutin, Lebedev Institute preprint N39 (1975).

[3] L. D. Faddeev, V. N. Popov, *Phys. Lett.* **25B**, 29 (1967).

[4] R. P. Feynman, *Acta Phys. Polonica* **24**, 697 (1963).

[5] L. A. Batalin, G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett.* **102B**, 27 (1981).

[6] G. t'Hooft, *Nucl. Phys.* **33B**, 173 (1971)

[7] G. Barnich, M. Henneaux, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1588 (1994).

[8] J. Wess, B. Zumino, *Phys. Lett.* **37B**, 95 (1971).

[9] K. Fujikawa, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1195 (1979).

[10] C. Becchi, preprint hep-th/9607181 (1996).

[11] J. H. Schwarz, *Prog. Theor. Phys. Supplement* **86**, 70 (1986).

[12] Steven Weinberg, *The Quantum Theory of Fields* (1996).

[13] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory* (1996).

[14] I. J. R. Aitchison, A. J. G. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics* (1982).

[15] Michio Kaku, *Quantum Field Theory* (1993).

[16] M. Henneaux, C. Teitelboim, *Quantization of gauge systems* (1992).

[17] Mikio Nakahara, *Geometry, Topology and Physics* (1990).

[18] Michio Kaku, *Introduction to Superstrings* (1988).